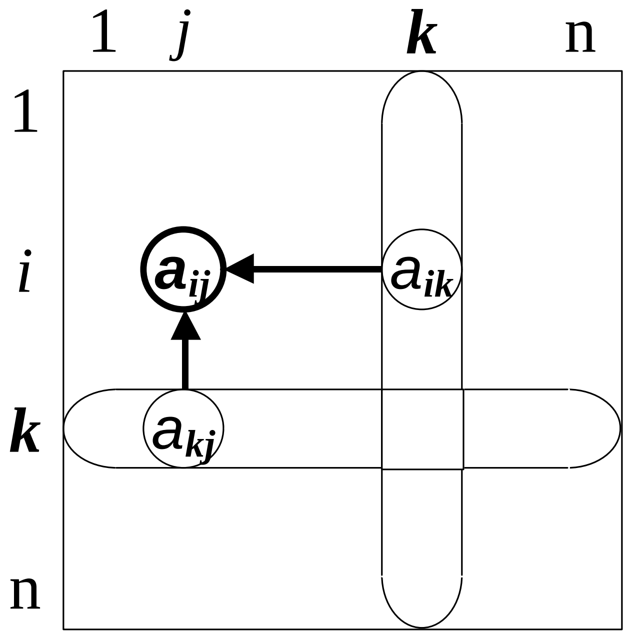
GRÁFOK GLOBÁLIS
(valamennyi viszonylatra történõ)
VIZSGÁLATA

Viszonylat: irányított csomópont pár *[i,j]*



Trivialitás:

Egy gráfon ha létezik *P[i,k]* út, és létezik *P[k,j]* út is, akkor létezik *P[i,j]* út is.

Ezen összefüggésben ***k*** pontot az *[i,j]* viszonylat <u>közvetítõ pont</u>jának-, míg valamennyi *P[i,j]* utat – együttesen – (*[i,j]* viszonylatbeli) <u>elérési lehetõség</u>nek (***a_{ij}***) nevezzük.

A j ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$) transzformáció család

$$j^{\,0}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

$$j^{\,k}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = j\,(\,j^{\,k-1}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}))\quad | \quad k = 1, 2, \dots n$$

Kiinduló mátrix („közvetlen elérési tábla”):

Alaphelyzet („üres” mátrix): $a_{ij} = M$ **" i,j De!:**

Nem súlyozott gráfnál: $a_{ij} = 1$ **Ha [i,j] él létezik " i,j**

Súlyozott gráfnál: $a_{ij} = t_{ij}$ **Ha [i,j] él létezik " i,j**

Mátrix transzformációk:

$a_{ij}^{0} = a_{ij}$ **" i,j**

$$a_{ij}^{k} = \begin{array}{lllr} ì & j\,(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}) \;|\; a_{ik}^{k-1}\ ^1\ M;\ a_{kj}^{k-1}\ ^1\ M;\ i\ ^1\ k;\ j\ ^1\ k & ü & \\ í & & ý & "\,i,j \\ î & a_{ij}^{k-1} \qquad \text{egyébként} & þ & \end{array}$$

k = 1, 2, ... n

Alap feladatok:

Integritás vizsgálatok: M = 0; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = 1; (irányítatlan élek !)

Dominancia vizsgálatok: M = 0; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = 1; (irányított élek !)

Hurok keresés: M = 0; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = max { a_{ij}^{k-1}, 2 - a_{ij}^{k-1}}

Útvariánsok leszámlálása: M = 0; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = a_{ij}^{k-1} + ($a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k-1}$)

Súlypont/Centrum/Átló: M = +¥; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = min { a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1} }

A leghosszabb spúr: M = - ¥; φ ($a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}$) = max { a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1} }

Floyd-Warshall

(„All-pairs shortest path”)

Inicializálás :

for $i:=1$ to n do
  for $j:=1$ to n do begin
    $a[i,j]:= w[i,j]^*$;
    $p[i,j]:=0$
  end;

Feltárás :

for $k:=1$ to n do
  for $i:=1$ to n do
    for $j:=1$ to n do
      if $a[i,k]+a[k,j]<a[i,j]$ then begin
        $a[i,j]:=a[i,k]+a[k,j]$;
        $p[i,j]:=k$
      end;

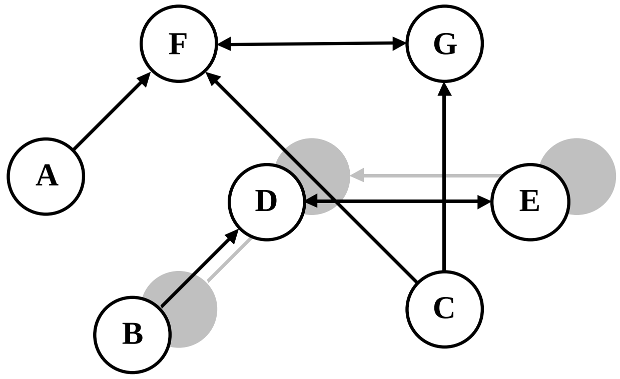
---

* $w[i,j]:=\tau[i,j]$, *ha* $(i,j)\in A$; $w[i,j]:=M$ egyébként

Warshall, 1959 – hurok keresés
Floyd, 1962 – legrövidebb út a gráfon

INTEGRITÁS VIZSGÁLATOK

$$\left(M = 0;\ \varphi\left(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1} \right) = 1 \right)$$



		A	B	C	D	E	F	G
	i \ j	1	2	3	4	5	6	7
A	1						1	
B	2				1			
C	3						1	1
D	4		1			1		
E	5				1			
F	6	1		1				1
G	7			1			1	

Kiegészített struktúra tábla

		A	B	C	D	E	F	G
	i \ j	1	2	3	4	5	6	7
A	1						1	
B	2				1			
C	3						1	1
D	4		1			1		
E	5				1			
F	6	1		1			1	1
G	7			1			1	

K = 1

		A	B	C	D	E	F	G
	i \ j	1	2	3	4	5	6	7
A	1						1	
B	2				1			
C	3						1	1
D	4		1		1	1		
E	5				1			
F	6	1		1			1	1
G	7			1			1	

K = 2

		A	B	C	D	E	F	G
	i \ j	1	2	3	4	5	6	7
A	1						1	
B	2		1		1	1		
C	3						1	1
D	4		1		1	1		
E	5		1		1	1		
F	6	1		1			1	1
G	7			1			1	1

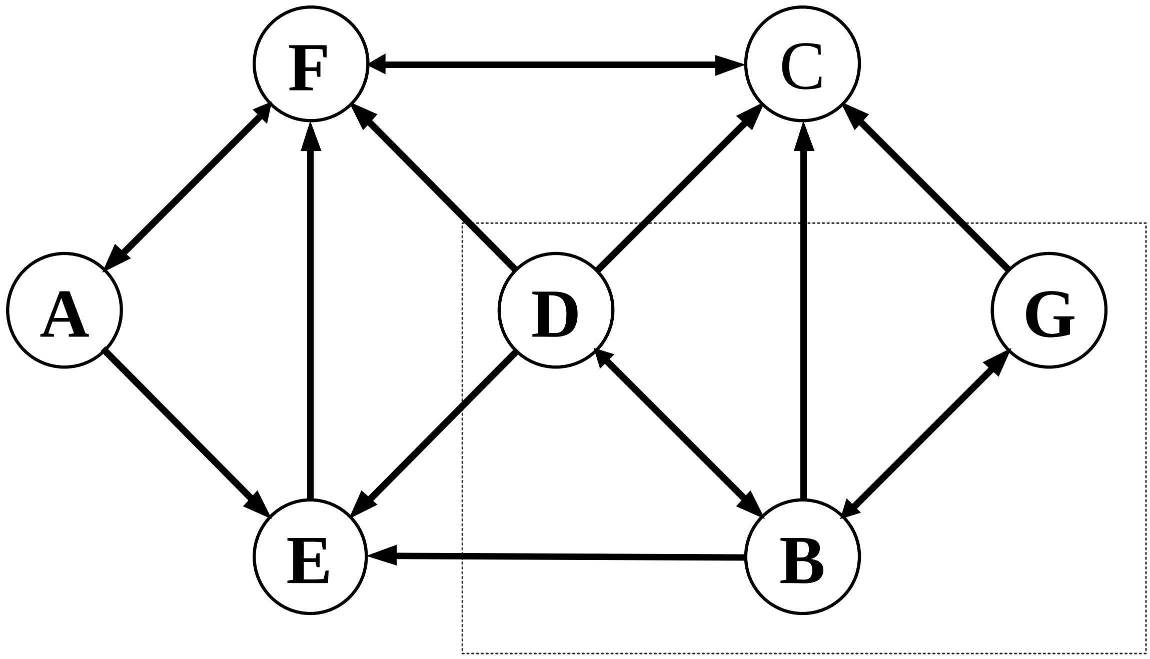
… K = 4 …

		A	C	F	G	B	D	E
	i \ j	1	3	6	7	2	4	5
A	1	1	1	1	1			
C	3	1	1	1	1			
F	6	1	1	1	1			
G	7	1	1	1	1			
B	2					1	1	1
D	4					1	1	1
E	5					1	1	1

Az átrendezett teljes elérési tábla

DOMINANCIA VIZSGÁLATOK

$$\left(M = 0;\ \varphi\left(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1} \right) = 1 \right)$$



Domináns pont(halmaz): A gráf azon *i* pontja (-inak halmaza), melybõl a gráf valamennyi pontjához út vezet. (P[i,j] minden *j* ¹ *i* -re létezik.)

Dominált pont(halmaz): A gráf azon *i* pontja (-inak halmaza), melyhez a gráf valamennyi pontjából út vezet. (P[j,i] minden *j* ¹ *i* -re létezik.)

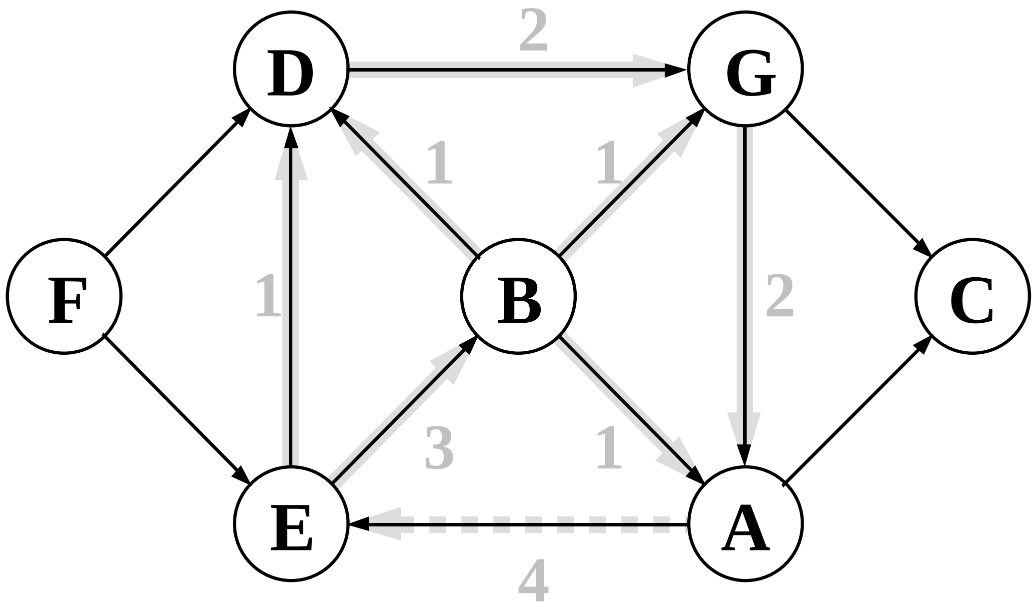
	i \ j	A *1*	B *2*	C *3*	D *4*	E *5*	F *6*	G *7*
A	*1*					1	1	
B	*2*			1	1	1		1
C	*3*						1	
D	*4*		1	1		1	1	
E	*5*						1	
F	*6*	1		1				
G	*7*		1	1				

	i \ j	A *1*	B *2*	C *3*	D *4*	E *5*	F *6*	G *7*	
A	*1*	1		1		1	1		
B	*2*	1	1	1	1	1	1	1	○
C	*3*	1		1		1	1		
D	*4*	1	1	1	1	1	1	1	○
E	*5*	1		1		1	1		
F	*6*	1		1		1	1		
G	*7*	1	1	1	1	1	1	1	○
		○		○		○	○		

A közvetlen- és a teljes elérési tábla a domináns- és a dominált ponthalmaz jelölésével

HUROK KERESÉS

$$\left(M = 0;\ \varphi\left(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1} \right) = \max\left\{ a_{ij}^{k-1}, 2 - a_{ij}^{k-1} \right\} \right)$$

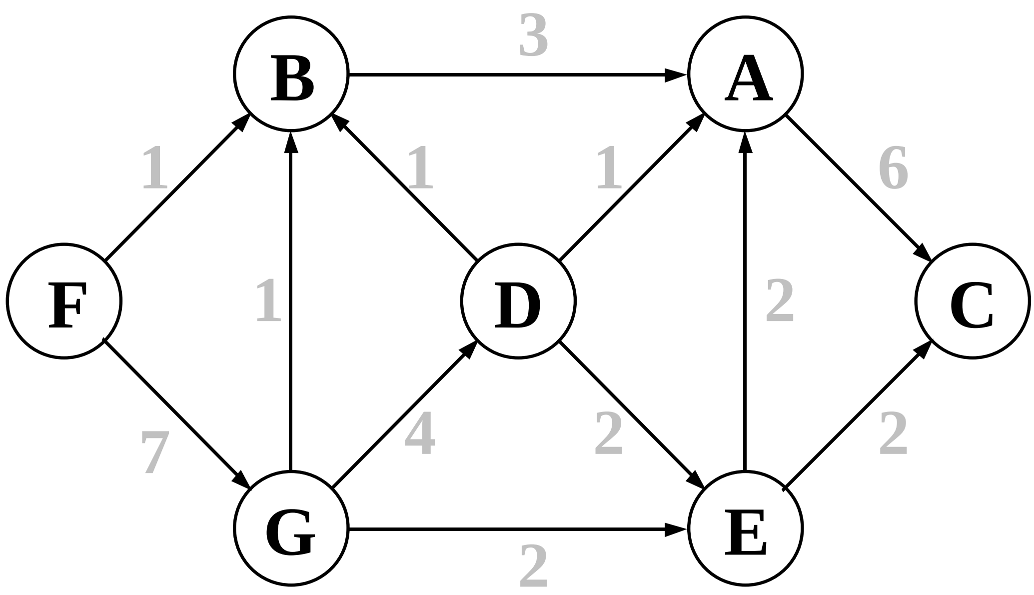


		A	B	C	D	E	F	G
	i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	*1*	2	2	1	2	1^{4}		2
B	*2*	1^{1}	2	2	1^{1}	2		1^{1}
C	*3*							
D	*4*	2	2	2	2	2		1^{2}
E	*5*	2	1^{3}	2	1^{1}	2		2
F	*6*	2	2	2	1	1		2
G	*7*	1^{2}	2	1	2	2		2

A teljes elérési tábla a hurokélek becsült befoglaló hurok-variáns számaival

ÚTVARIÁNSOK LESZÁMLÁLÁSA

$$\left(M = 0;\ \varphi\left(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1} \right) = a_{ij}^{k-1} + \left(a_{ik}^{k-1} \cdot a_{kj}^{k-1} \right) \right)$$

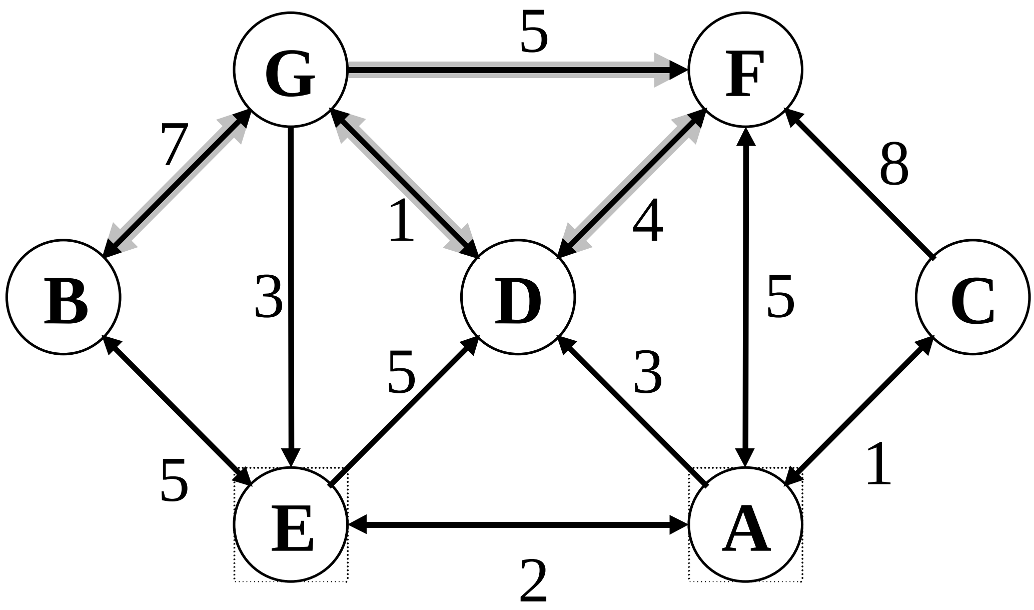


		A	B	C	D	E	F	G
	i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	*1*			1^{6}				
B	*2*	1^{3}		1				
C	*3*							
D	*4*	3^{1}	1^{1}	4		1^{2}		
E	*5*	1^{2}		2^{2}				
F	*6*	6	3^{1}	**8**	1	2		1^{7}
G	*7*	5	2^{1}	7	1^{4}	2^{2}		

A teljes elérési tábla az élek *FC* viszonylatbeli befoglaló út-variáns számaival

Súlypont / Centrum / Átló keresés

$$(\; M = +\infty; \;\; \varphi (a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}) = \min \{ a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1} \} \;)$$



Súlypont: A gráf azon pontja, melybõl (melyhez) a gráf valamennyi más pontjához (pontjából) vezetõ legrövidebb utak hosszának összege a lehetõ legkisebb.

Centrum: A gráf azon pontja, melybõl (melyhez) a gráf valamennyi más pontjához (pontjából) vezetõ legrövidebb utak közül a leghosszabb is a lehetõ legrövidebb.

Átló: A gráf viszonylatain a legrövidebb utak közül a leghosszabb (M *)

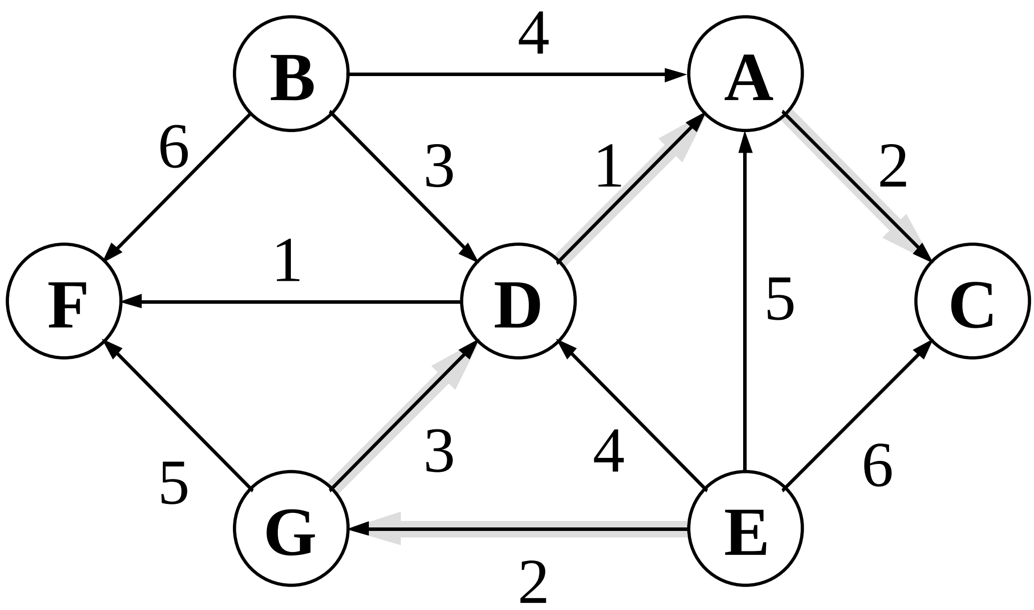
		A	B	C	D	E	F	G
	i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	*1*			1	3	2	5	
B	*2*					5		7
C	*3*	1					8	
D	*4*						4	1
E	*5*	2	5		5			
F	*6*	5			4			
G	*7*		7		1	3	5	

		A	B	C	D	E	F	G		
	i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	**FS**	**FC**
A	*1*	2	7	1	3	2	5	4	**22**	**7**
B	*2*	7	10	8	8	5	**12**	7	47	12
C	*3*	1	8	2	4	3	6	5	27	8
D	*4*	6	8	7	2	4	4	1	30	8
E	*5*	2	5	3	5	4	7	6	28	7
F	*6*	5	**12**	6	4	7	8	5	39	12
G	*7*	5	7	6	1	3	5	2	27	7
NS		26	47	31	25	**24**	39	28		
NC		7	12	8	8	**7**	12	7		

A közvetlen- és a teljes elérési tábla a Forrás- és Nyelõ oldali Súlypont és Centrum, valamint az átló jelölésével

A LEGHOSSZABB SPÚR

$$\left(M = -\infty;\ \varphi\left(a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1}, a_{kj}^{k-1}\right) = \max\left\{ a_{ij}^{k-1}, a_{ik}^{k-1} + a_{kj}^{k-1} \right\} \right)$$

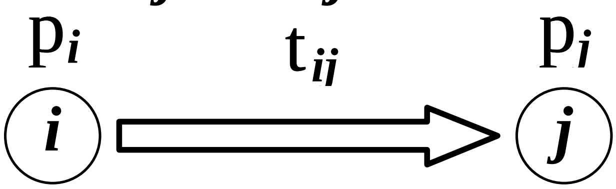


	j / i	A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6	G 7
A	1			2^{2}				
B	2	4^{4}		6	3^{3}		6^{6}	
C	3							
D	4	1^{1}		3			1^{1}	
E	5	6^{5}		**8** ^{6}	5^{4}		7	2^{2}
F	6							
G	7	4		6	3^{3}		5^{5}	

GTM (Általános idõmodell)

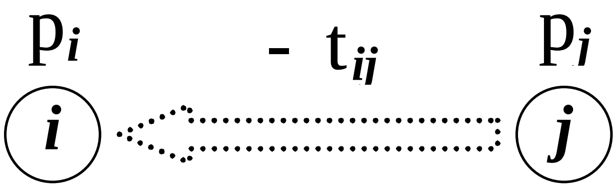
Relációk homogenizálása

t_{ij} £ $p_j - p_i$



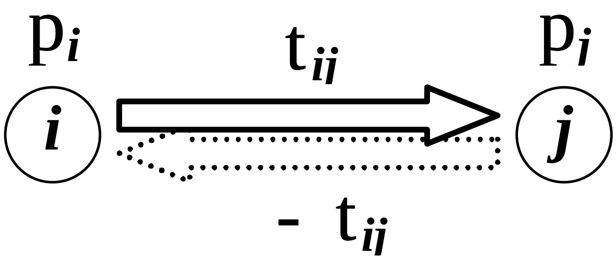
$p_j - p_i$ £ t_{ij} $/\cdot(-1)$

$$-\tau_{ij} \leq \pi_i - \pi_j$$



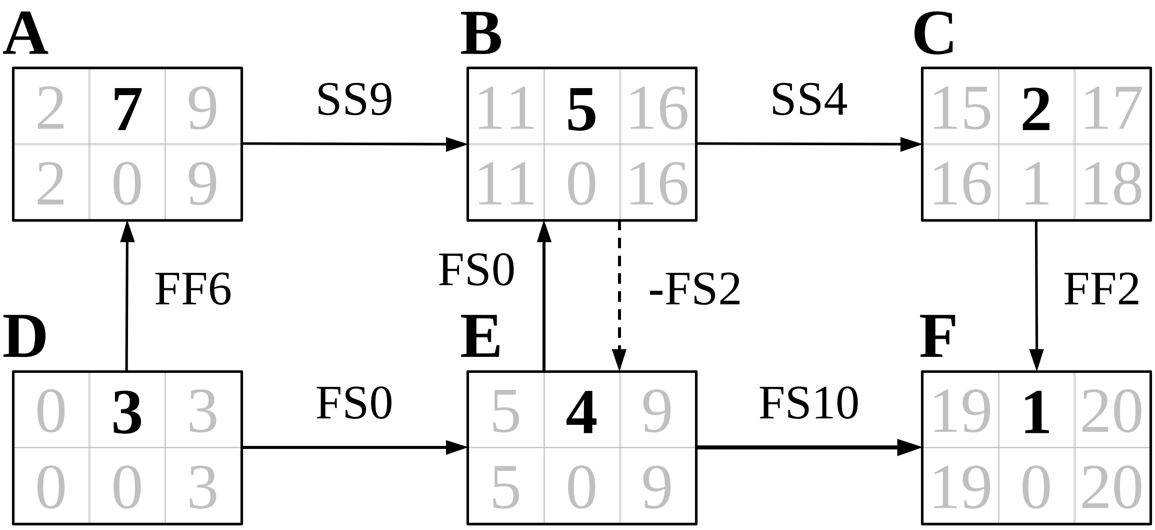
$p_j - p_i = t_{ij}$

$$\tau_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq \tau_{ij}$$

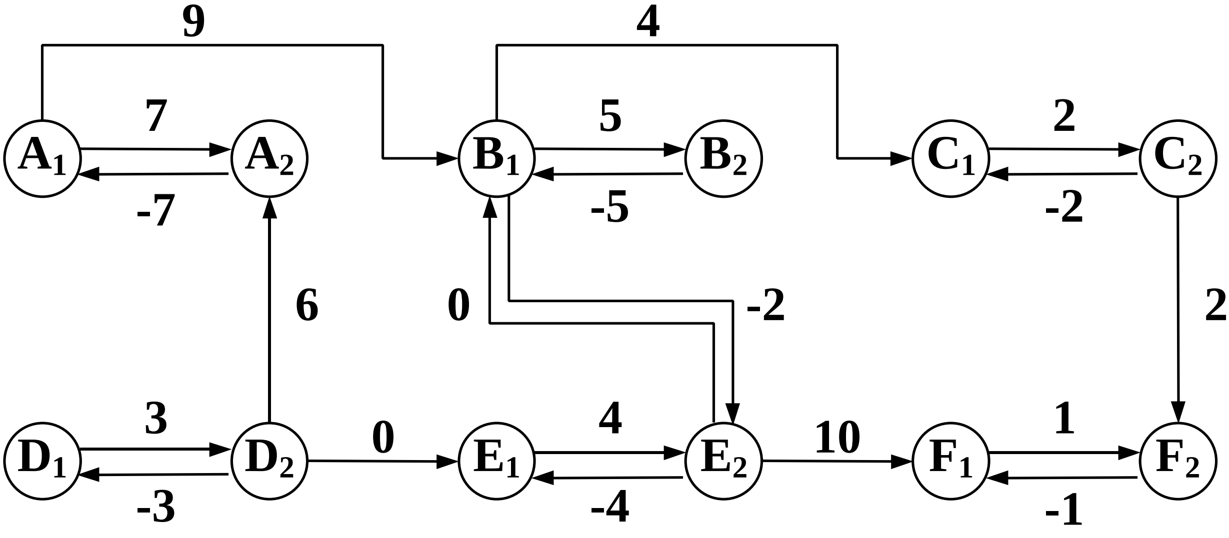


MPM/PDM → GTM

MPM/PDM hálós idõmodell
heterogén feltételekkel



MPM/PDM modell GTM átirata
homogén feltételrendszerrel



Módosított/új fogalmak

Pozitív forrás :

Csomópont mely legalább egy nem-negatív élparaméterû élnek kezdõpontja, de egyetlen nem-negatív élparaméterû élnek sem végpontja

Pozitív nyelõ :

Csomópont mely legalább egy nem-negatív élparaméterû élnek végpontja, de egyetlen nem-negatív élparaméterû élnek sem kezdõpontja

Pozitív/Negatív/Null hurok :

Adott hurok élparamétereinek összege alapján

Felismerés :

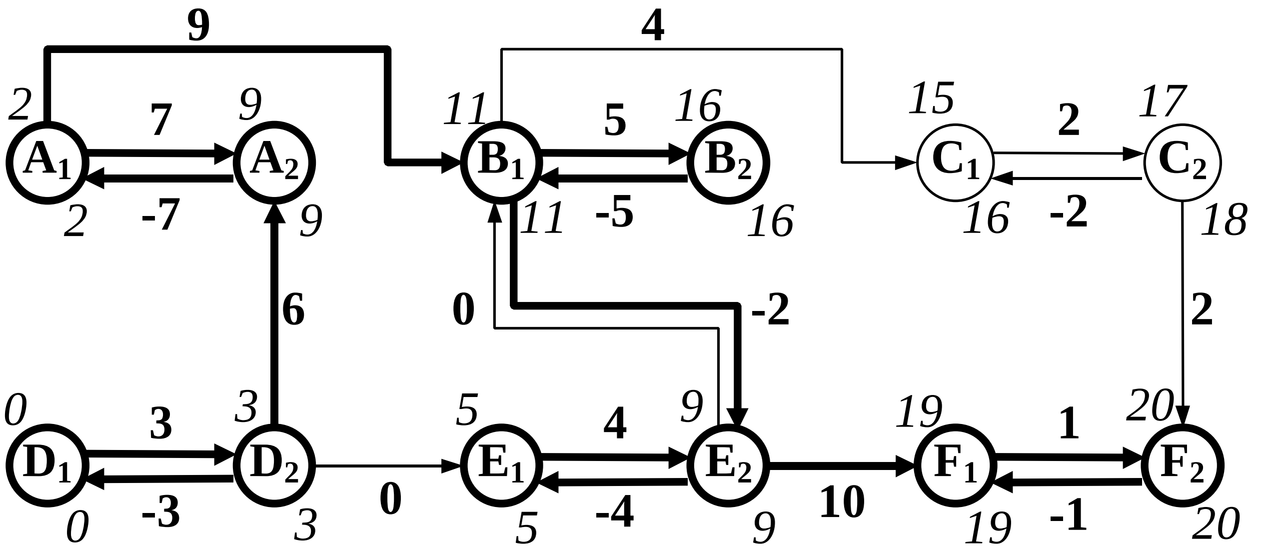
A leghosszabb út elsõ- és utolsó éle nem lehet negatív élparaméterû !

Kritikus út :

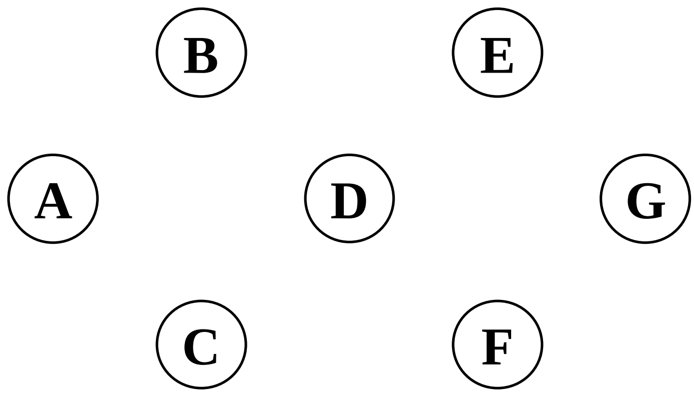
Pozitív forrás<u>ok</u> és pozitív nyelõ<u>k</u> közötti leghosszabb utak alkotta <u>rész-gráf</u>

Gráf megkötés : - *(Pozitív hurok !)*

Idõpotenciálok meghatározása



p^f \ p^n		20		20								20		
		A_1	**A_2**	**B_1**	**B_2**	**C_1**	**C_2**	**D_1**	**D_2**	**E_1**	**E_2**	**F_1**	**F_2**	p^{max}
0	**A_1**	0	7	9	14	13	15			3	7	17	18	2
	A_2	-7	0	2	7	6	8			-4	0	10	11	~~20~~ 9
	B_1			0	5	4	6			-6	-2	8	9	11
	B_2			-5	0	-1	1			-11	-7	3	4	~~20~~ 16
	C_1					0	2					3	4	16
	C_2					-2	0					1	2	18
0	**D_1**	2	9	11	16	15	17	0	3	5	9	19	**20**	0
	D_2	-1	6	8	13	12	14	-3	0	~~0~~2	6	16	17	3
	E_1			4	9	8	10			0	4	14	15	5
	E_2			0	5	4	6			-4	0	10	11	9
	F_1											0	1	19
	F_2											-1	0	20
	p^{min}	~~0~~ 2	9	11	16	15	17	0	3	5	9	19	20	



		A	B	C	D	E	F	G
	i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
A	*1*							
B	*2*							
C	*3*							
D	*4*							
E	*5*							
F	*6*							
G	*7*							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							